الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

مسابقة توظيف أساتذة التعليم الثانوي * دورة 2001 *

اختبار في مادة الرياضيات

المدة : 4 ساعات

التمرين الأول : (04 نقاط)

α وسيط حقيقي من المجال $[0 ، 1]$ لتكن $تا_\alpha$ الدالة ذات المتغير الحقيقي والمعرفة كما يلي: $تا_\alpha(س) = \sqrt{س + \sqrt{2س - \alpha}} + \sqrt{س - \sqrt{2س - \alpha}}$

1) عين مجموعة التعريف للدالة $تا_\alpha$.

2) حل وناقش حسب الوسيط الحقيقي α المعادلة $تا_\alpha(س) = \sqrt{2}$.

التمرين الثاني : (08 نقاط)

المستوي منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(م ، \vec{و} ، \vec{ى})$. λ عدد حقيقي معطى ،

(γ_λ) مجموعة النقط ن (س ، ع) المعرفة بالمعادلة التالية :

$$\lambda س^2 + (1+\lambda) ع^2 + 2\lambda س - \lambda^2 = 0$$

1) عين المجموعة (γ_λ) وعناصرها الهندسية المميزة عندما λ تتغير على ح مجموعة الأعداد الحقيقية.

2) نعتبر : $\lambda = 1$ ، ن نقطة من المجموعة (γ_1) لاحقتها العدد المركب ص ، وθ قيس رئيسي لعمدة العدد ص .

أ) عين طويلة العدد المركب ص بدلالة س فاصلة النقطة ن .

ب) عين طويلة العدد المركب ص بدلالة θ.

جـ) نَ ، نً نقطتان من (γ_1) ، لاحقيهما على الترتيب العددين صَ ، صً .

بحيث : عمدة صَ $\equiv \theta \ [2\pi]$ ، عمدة صً $\equiv \theta + \pi \ [2\pi]$.

عين طويلة الشعاع $\|\overrightarrow{نَ نً}\|$ بدلالة θ.

المسألة : (08 نقاط)

من أجل كل عدد حقيقي ط نعرف دالة عددية $تا_ط$ ذات المتغير الحقيقي س كما يلي :

$تا_ط(س) = \frac{1}{2} ط س |س| + لو(س + \sqrt{س^2 + 1})$ (لو يرمز الى اللوغاريتم النبري)

I) 1) بين أن الدالة تا$_{ط}$ دالة فردية .

2) ناقش حسب قيم ط جهة تغير الدالة تا$_{ط}$.

3) أحسب : $\lim\limits_{س \to +\infty}$ تا$_{ط}$(س) ، $\lim\limits_{س \to -\infty}$ تا$_{ط}$(س)

II) في مستو منسوب لمعلم متعامد ومتجانس (م ، $\vec{و}$ ، $\vec{ى}$) ليكن (ى$_0$) المنحني الممثل للدالة تا$_0$.

أ) 1) ادرس تغيرات الدالة تا$_0$.

2) ادرس الفروع اللانهائية للمنحني (ى$_0$) .

3) ليكن (ق) المماس للمنحني (ى$_0$) عند النقطة التي فاصلتها 0 .

أدرس وضعية المنحني (ى$_0$) بالنسبة للمستقيم (ق).

4) أنشئ المنحني (ى$_0$) .

5) احسب المساحة م للحيز المستوي المحدد بمنحني الدالة تا$_0$ وبحامل محور الفواصل وبالمستقيم الذي معادلته : س = 1 .

ب) نرمز للدالة العكسية للدالة تا$_0$ بالدالة : حا

1) عين حا(س) بدلالة س.

2) عين حا(2س) ، حا(3س) بدلالة حا(س) .

3) لتكن المتتالية (ح$_ن$) المعرفة بـ :

ح$_0$ = 1 و ∀ ن ∈ ط : ح$_{ن+1}$ = حا(ح$_ن$)

أحسب ح$_ن$ بدلالة ن.

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

مسابقة توظيف أساتذة التعليم الثانوي * دورة 2003 *

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة : 4 ساعات

الجزء الأول (05 نقاط)

1) عين إحداثيي النقطة هـ مركز المسافات المتناسبة للنقط أ (−4 ، 4) . ب (−5 ، −1) . جـ (1 ، 1) المرفقة بالمعاملات 2 ، 1 ، 1 على التوالي ـ المعلم متعامد ومتجانس ـ

2) ن نقطة من المستقيم (Δ) ذي المعادلة ع = 2 س − 7 . برهن بطريقتين أنه يوجد نقطة ن بحيث $2\,ن أ^2 + ن ب^2 + ن جـ^2$ يكون أصغريا .

الجزء الثاني (05 نقاط)

يعطى العدد المركب ص حيث $ص = 2\,جب^2\alpha + ت\,جب 2\alpha$ ، $\alpha \in]0 ، 2\pi]$

1) عين حسب قيم α طويلة وعمدة العدد ص − نسمي س و ع الجزء الحقيقي والتخيلي .

2) عين مجموعة قيم الجزء الحقيقي للعدد ص .

3) أ − جد علاقة بين س و ع مستقلة عن α .

ب − تحقق من الإجابة عن السؤال 2) .

4) جد وارسم مجموعة النقاط ن صورة ص عندما يتغير α (المعلم متعامد ومتجانس)

الجزء الثالث (10 نقاط)

1) ادرس تغيرات الدالة تا : س ⟵ $\frac{س}{س + 1}$ − لو (1 + س) . برهن على وجود عدد λ

$0 < \lambda < 1$ حيث أنه إذا كان $س \in [\frac{1}{2} ، 1]$ فإن $|تا(س)| \geq \lambda$

برهن أن : $\lambda < 0{,}2$

2) نعتبر الدالة ها حيث ها (0) = 1 و ها (س) = $\frac{لو(1 + س)}{س}$ لمّا $س \neq 0$

ـ اثبت أن ها قابلة للإشتقاق على مجموعة تعريفها − حدّد ها'(0)

ـ أدرس تغيرات الدالة ها − نسمي (ى) منحني الدالة ها − المعلم متعامد ومتجانس .

أنشئ المماس لـ (ى) عند النقطة التي فاصلتها (0) ثم أنشئ (ى) .

3) اثبت أن المعادلة ها (س) = س تقبل حلا وحيدا α في المجال $[\frac{1}{2} ، 1]$

4) نعرف المتتالية (ى$_{ن}$) كما يلي : ى$_{0}$ = 1 و $\forall$ ن $\in$ ط ى$_{ن+1}$ = $\frac{لو(1 + ى_{ن})}{ى_{ن}}$

أ – برهن أن : $\forall$ ن $\in$ ط $\frac{1}{2} \leq$ ى$_{ن}$ ≤ 1

ب – برهن أن : $\forall$ ن $\in$ ط | ى$_{ن+1}$ − α | < 0,8 | ى$_{ن}$ − α |

جـ – استنتج أن (ى$_{ن}$) متقاربة . احسب نها ى$_{ن}$
ن ← + ∞

$\boxed{2 \geq \frac{1}{ى_{0}}}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{2} \leq ى_{0}$

$1 \leq ى_{0}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{1}{ى_{0}} \leq 1$.

$\boxed{ى_{0}}$

$\frac{1}{2} \leq ى_{0}$

$\frac{1}{ى_{0}} \leq 2$

$ى_{0} \leq$

$\boxed{\frac{1}{ى_{0}} \leq 1}$

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

مسابقة توظيف أساتذة التعليم الثانوي — دورة: ديسمبر 2009

اختبار في مادة: الرياضيات (التخصص) — المدة: 03 ساعات

التمرين الأول: (03 نقاط)

1) – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x^3+1=0$.

2) – حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\left(\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|\right)^3=-1$ ، حيث يرمز " ln " إلى اللوغاريتم النبيري.

التمرين الثاني: (05 نقاط)

المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

m وسيط حقيقي. نعتبر التحويل النقطي T_m الذي يرفق بكل نقطة M ذات اللاحقة z النقطة M' ذات اللاحقة z' حيث: $z'=(m+i)z+m-1-i$.

1) – هل توجد قيمة للعدد m بحيث يكون T_m إنسحابا ؟

2) – عيّن العدد m بحيث يكون T_m دورانا. عيّن عندئذ المركز و زاوية له.

3) – نضع فيما يلي: $m=1$.

أ) – احسب لاحقة Ω النقطة الصامدة للتحويل النقطي T_m.

ب) – من أجل كل عدد مركب z يختلف عن 1 ، احسب $\frac{z'-1}{z-1}$.

– باستعمال تفسيرا هندسيا لكل من الطويلة و عمدة للعدد $\frac{z'-1}{z-1}$ ، برهن أنّ T_1 هو تشابه مباشر يطلب تعيين عناصره المميّزة.

4) – نعرّف في المستوي ، المتتالية النقطية (M_n) كما يلي:

$M_0=O$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $M_{n+1}=T_1(M_n)$.

أ) – مثل النقط M_1 ، M_2 ، M_3 ، M_4.

ب) – من أجل كل عدد طبيعي n نضع: $d_n=\Omega M_n$.

بر هن أنّ (d_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها. هل (d_n) متقاربة ؟

التمرين الثالث: (06 نقاط)

1) – لتكن f الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـــ : $f(x)=x^2e^{1-x}$.

و نرمز بـــ (C_f) إلى تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

أ) – عيّن نهايتي f عند كل من $+\infty$ و $-\infty$. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) .

ب) – ادرس إتجاه تغيّر الدالة f و شكل جدول تغيّراتها.

جـ) – إرسم (C_f).

2) – ليكن n عدد طبيعي غير معدوم، نعتبر التكامل I_n المعرّف بـــــ : $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\,dx$.

أ) – باستعمال التكامل بالتجزئة جد علاقة بين I_{n+1} و I_n.

ب) – احسب I_1 و I_2.

جـ) – أعط تفسيرا هندسيا للعدد I_2 مبيّنا ذلك على الرسم.

3) – أ) – برهن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;1]$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا المتباينة الآتية: $x^n \le x^n e^{1-x} \le x^n e$.

ب) – استنتج حصرا للعدد I_n ثم عيّن نهاية I_n لما يؤول n إلى $+\infty$.

التمرين الرابع: (06 نقاط)

1. نعتبر المعادلة (1)ذات المجهول (n,m) من $\mathbb{Z}^2$: $11n-24m=1 \quad ...(1)$

أ) – تحقق بواسطة نص نظرية أنّ المعادلة (1) تقبل على الأقل حلا.

ب) – جد باستعمال خوارزمية إقليدس حلا خاصا للمعادلة (1).

جـ) – عيّن مجموعة حلول المعادلة (1).

2. نريد إيجاد $PGCD\left(10^{11}-1\,,10^{24}-1\right)$.

أ) – بيّن أنّ العدد 9 يقسم كل من العددين : $10^{11}-1$ و $10^{24}-1$.

ب) – بيّن أنّه إذا كانت الثنائية (n,m) حلا للمعادلة (1) فإنّ $\left(10^{11n}-1\right)-10\left(10^{24m}-1\right)=9$.

– بيّن أنّ $\left(10^{11}-1\right)$ يقسم $\left(10^{11n}-1\right)$.

– استنتج من السؤال السابق أنّه يوجد عددين طبيعيين N و M حيث:

$\left(10^{11}-1\right)N-\left(10^{24}-1\right)M=9$.

د) – بيّن أنّ كل قاسم مشترك للعددين $\left(10^{24}-1\right)$ و $\left(10^{11}-1\right)$ يقسم 9.

هـ) – استنتج من الأسئلة السابقة $PGCD\left(10^{11}-1\,,10^{24}-1\right)$.